FEUILLE DE TD

Applications linéaires, Décomposition de Dunford algorithmique

Applications linéaires

Exercice 1. On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}^3)$ de f. f est-elle surjective ?

---

1. On vérifie l'axiome :
$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) &= \big(\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y', \alpha x+\beta x'-2(\alpha z+\beta z')\big) \\ &= \alpha f((x,y,z))+\beta f((x',y',z')). \end{aligned}$$
2. On a
$$f((x,y,z))=0 \iff \left\{\begin{array}{ll} x+y & =0 \\ x-2z & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} y & =-x \\ z & =-\frac{1}{2}x \end{array}\right. .$$
On en déduit que $f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{vect}\,((2,-2,-1))$. On a $f((2,-2,-1)) = f(0)$ donc f n'est pas injective.
3. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, on a $f\left((0,u,-\frac{1}{2}v)\right) = (u,v)$ donc $f(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^2$ et f est surjective.

Exercice 2.
Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1)=-e_1+2e_3$, $\varphi(e_2)=e_2+2e_3$ et $\varphi(e_3)=2e_1+2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$.

---

1. On note $x=(x_1,x_2,x_3)$ et on a donc
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi(e_1)+x_2\varphi(e_2)+x_3\varphi(e_3) \\ &= (-x_1+2x_3, x_2+2x_3, 2x_1+2x_2). \end{aligned}$$
2. Déterminons le noyau de φ :
$$\begin{aligned} \varphi(x_1,x_2,x_3)=0 &\iff \left\{\begin{array}{ll} -x_1+2x_3 & =0 \\ x_2+2x_3 & =0 \\ 2x_1+2x_2 & =0 \end{array}\right. \\ &\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} -x_1+2x_3 & =0 \\ x_1+x_2 & =0 \\ x_1+x_2 & =0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ll} x_3 & =\frac{1}{2}x_1 \\ x_2 & =-x_1 \end{array}\right. . \end{aligned}$$
On en déduit que $\ker\varphi = \mathrm{vect}\,((2,-2,1))$.
Déterminons maintenant l'image de φ : soit $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{K}^3$,
$$\begin{aligned} \varphi(x)=y &\iff \left\{\begin{array}{ll} -x_1+2x_3 & =y_1 \\ x_2+2x_3 & =y_2 \\ 2x_1+2x_2 & =y_3 \end{array}\right. \\ &\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ll} -x_1+2x_3 & =0 \\ x_1+x_2 & =y_2-y_1 \\ x_1+x_2 & =\frac{1}{2}y_3 \end{array}\right. . \end{aligned}$$
Donc il existe $x\in\mathbb{K}^3$ tel que $\varphi(x)=y$ si et seulement si $y_3=2(y_2-y_1)$ et dans ce cas, $\varphi\left((1, \frac{1}{2}y_3-1, \frac{y_1+1}{2})\right)=y$. On a donc
$$\mathrm{Im}\,\varphi = \left\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{K}^3 \mid y_3=2(y_2-y_1)\right\} = \mathrm{vect}\,((1,0,-2),(0,1,2)).$$

Exercice 3.
Soient $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $v\in\mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\ker u\subset\ker(v\circ u)$ et que $\mathrm{Im}\,(v\circ u)\subset\mathrm{Im}\,v$.

- Soit $x\in\ker u$, on a $u(x)=0$. Donc $v(u(x))=0$, c'est-à-dire $x\in\ker(v\circ u)$.
- Soit $y\in\mathrm{Im}\,(v\circ u)$, il existe $x\in E$ tel que $v\circ u(x)=y$. On a donc $v(u(x))=y$ et $y\in\mathrm{Im}\,v$.

Exercice 4.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

---

1. On a
$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q)(X) &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) - P(X) + \lambda\left(Q(X+1) - Q(X)\right) \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c$, on a
$$f(P) = 2aX + a + b,$$
donc $f(P) = 0$ si et seulement si $a = b = 0$, c'est-à-dire $\ker P = \mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes constants.
3. On déduit aussi de cette formule que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_1[X]$.
4. On a $f(1) = 0$, $f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X + 1$ donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Les polynômes 1, $X-1$ et $(X-1)(X-2)$ ont des degrés échelonnés donc ils forment une famille libre. Par dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On a alors $f(1) = 0$, $f(X-1) = 1$ et $f((X-1)(X-2)) = 2(X-1)$ donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Montrer que l'application $g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

---

g est bien une application linéaire.

- Montrons que g est injective. Soit $x \in \ker g$, on a alors $x \in \ker u \cap G = \{0\}$.
- Montrons que g est surjective. Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Puisque $G \oplus \ker u = E$, il existe $x_G \in G$ et $x_K \in \ker u$ tels que $x = x_G + x_K$. Donc $y = u(x_G + x_K) = u(x_G) = g(x_G) \in \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 6. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Si E est de dimension finie, en déduire que f est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$).
On pourra commencer l'étude en dimension 1 puis 2.
3. Montrer que le résultat est toujours vrai en dimension infinie.
On pourra considérer deux éléments x, $y \in E$ et comparer λ_x et λ_y selon que (x, y) est liée ou libre.

---

1. Soit $x \in E$, si $x = 0$ alors $f(x) = 0$ donc tout $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ convient. Sinon, la famille $(x, f(x))$ est liée donc il existe a, $b \in \mathbb{K}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que $ax + bf(x) = 0$. Or $x \neq 0$ donc $b \neq 0$. Ainsi $\lambda_x = -\frac{b}{a}$ convient.
2. Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_k) = \lambda_k e_k$. Soit $e = e_1 + \ldots + e_n$, on a alors $f(e) = \lambda_e e_1 + \ldots + \lambda_e e_n$, mais aussi $f(e) = f(e_1) + \ldots + f(e_n) = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Par unicité des coordonnées dans une base, $\lambda_e = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Donc finalement, pour tout $x \in E$, $f(x) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + x_n \lambda_n e_n = \lambda_e x$.
3. Soit x et y deux vecteurs non nuls de E.
Supposons d'abord que (x, y) est liée donc $x = \mu y$ avec $\mu \neq 0$. On a alors $f(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mu y$ et $f(x) = f(\mu y) = \mu f(y) = \mu \lambda_y y$. On en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.
Supposons maintenant que (x, y) est libre. On a $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ et $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ donc $(\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$. La famille est libre donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.
Dans tous les cas, on obtient que $\lambda_x = \lambda$ pour tout $x \in E$.

Exercice 7.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base et une équation cartésienne de $\mathrm{Ker} f$.
2. Déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\, f$ et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
4. En déduire une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(f) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & +y & -z & = 0 \\ -3x & -3y & +3z & = 0 \\ -2x & -2y & +2z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x + y - z = 0.$$

Donc une équation cartésienne du noyau de f est $x + y - z = 0$ et $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(1, -1, 0), (1, 0, 1)$. Le noyau est donc de dimension 2.

2. On a vu que $\mathrm{Im}\, f$ est engendré par les images par f des vecteurs d'une base. On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on a $f(e_1) = (1, -3, -2) = f(e_2) = -f(e_3)$. On en déduit que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(1, -3, -2).$$

Un système d'équations cartésiennes de cet espace vectoriel est

$$\left\{ \begin{array}{llll} 3x & +y & +0 & = 0 \\ 2x & +0 & +z & = 0 \end{array} \right. .$$

3. On a

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\, f \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + y - z & = 0 \\ 3x + y & = 0 \\ 2x + z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y & = -3x \\ z & = -2x \end{array} \right. .$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(1, -3, -2)$.

Prenons les vecteurs $b_1 = e_1$, $b_2 = (1, -3, -2)$ et $b_3 = (1, 0, 1)$. On a alors $f(b_1) = b_2$ et $f(b_2) = f(b_3) = 0$. De plus, la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = M$ et que $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Donc, en choisissant

$$P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, on se donne deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E. Soit $\mathcal{C}$ une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire sur E. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}(u)$, exprimer B en fonction de A et de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$.

On note $P = P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$. Soit $x \in E$, on note X_1 le vecteur des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_1$ et X_2 le vecteur des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_2$. On note aussi Y le vecteur des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{C}$. On a alors $Y = AX = BX'$.

Or, la formule de changement de base pour un vecteur donne $X = PX'$, donc $AX = APX' = BX'$. Cette relation étant vraie pour tout vecteur X', on obtient $B = AP$.

On peut aussi appliquer directement le résultat du cours :

$$B = Q^{-1}AP,$$

où $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}} = I_p$, avec $p = \dim F$. On obtient donc $B = AP$.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2)$ et $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Im}\, u$.
2. Montrer l'équivalence

$$\mathrm{Ker}\,(u^2) = \mathrm{Ker}\,(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}.$$

3. Montrer l'équivalence

$$\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im} u = E.$$

4. Supposons que E est de dimension finie. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im} u = E \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u.$$

---

1. Si $u(x) = 0$ alors $u(u(x)) = 0$. De plus, si $y = u^2(x)$ alors $y = u(u(x))$.
2. Supposons que $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u)$. Soit $y \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$. Donc $u^2(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u)$. D'où $y = u(x) = 0$.
   Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$. Alors $u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im} u$ donc $u(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker}(u)$.
3. Supposons que $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$. Soit $y \in E$. Alors $u(y) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$. Donc il existe $x \in E$ tel que $u(y) = u(u(x))$, c'est-à-dire $u(y - u(x)) = 0$. On a donc $y = y - u(x) + u(x)$ avec $y - u(x) \in \operatorname{Ker}(u)$ et $u(x) \in \operatorname{Im} u$.
   Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im} u = E$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$: $y = u(x)$ avec $x \in E$. Alors $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Ker}(u)$ et $b \in \operatorname{Im} u$, ce qui donne $y = u(x) = u(b)$. D'où $y \in \operatorname{Im} u^2$.
4. On a montré que si $\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im} u = E$ alors $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.
   En dimension finie, le théorème du rang nous donne
   $$\dim \operatorname{Ker}(u) + \dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}\left(u^2\right) + \dim \operatorname{Im} u^2 = \dim E.$$
   On a donc $\dim \operatorname{Ker}(u) = \dim \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ si et seulement si $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im} u^2$, ce qui prouve l'équivalence $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$, d'après la question 1.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
2. En déduire $\operatorname{Ker}(\phi)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} \phi$.

---

1. On a $\phi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$.
2. On en déduit que $\phi(X^k) = 0$ si et seulement si $k = 0$ et donc $\operatorname{Ker}(\phi)$ est le sous-espace des polynômes constants.
3. On déduit également de la question 1 que $\operatorname{Im} \phi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or le théorème du rang donne
   $$\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker}(\phi) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X],$$
   donc $\operatorname{Im} \phi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u - 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que u est inversible et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.
3. Montrer que $(u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + 2\mathrm{Id}_E) = (u + 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0$.
4. En écrivant $x = \frac{1}{3}(u(x) + 2x) - \frac{1}{3}(u(x) - x)$, montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E) = E$.

---

1. On a $\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u = \mathrm{Id}_E$, donc $u \circ \left(\frac{u + \mathrm{Id}_E}{2}\right) = \left(\frac{u + \mathrm{Id}_E}{2}\right) \circ u = \mathrm{Id}_E$. Donc u est inversible et $u^{-1} = \frac{u + \mathrm{Id}_E}{2}$.
2. Si $x \in E$ vérifie : $u(x) = x$ et $u(x) = -2x$, alors $3x = 0$ et donc $x = 0$.
3. On a $(u - \mathrm{Id}_E)(u + 2\mathrm{Id}_E) = u^2 + 2u - u - 2\mathrm{Id}_E = 0$. De même pour l'autre composition.
4. On a montré que $\operatorname{Im}(u + 2\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E)$, donc pour tout $x \in E$, $u(x) + 2x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $u(x) - x \in \operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ différents deux à deux. En étudiant l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$, montrer que pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme L de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L(x_i) = y_i$.
2. Soient a, b, c trois réels distincts et soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, $P(c) = \gamma$ et $P'(c) = \delta$.

---

1. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\varphi(P)=0$. Alors P a $n+1$ racines distinctes et $\deg P \leq n$, ce qui implique que $P=0$. Ainsi, φ est injective. Or $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$, donc φ est bijective. On en déduit le résultat.
2. On définit l'application linéaire
$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(a), P(b), P(c), P'(c)) \end{array}.$$
Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\theta)$, alors $P(a)=P(b)=P(c)=0$, donc $P=\lambda(X-a)(X-b)(X-c)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, car $\deg P \leq 3$. Maintenant, $P'(c)=0=\lambda(c-a)(c-b)$ donc $\lambda=0$ et $P=0$. Ainsi θ est injective et puisque $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4$, θ est bijective.

Exercice 13. Soit $u=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ et (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3-\frac{x+y+z}{3}u.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs $v\in\mathbb{R}^3$ tels que $f(v)=v$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
4. Montrer que f est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel, parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?
5. Trouver une matrice P inversible telle que
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

---

1. La matrice A de f dans la base (e_1,e_2,e_3) est
$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$
2. Puisque f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a $\mathrm{Ker}\,(f)=\left\{X\in\mathbb{R}^3 \mid AX=0\right\}$. On résout donc
$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -y & -z & = & 0\\ -x & +2y & -z & = & 0\\ -x & -y & +2z & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -y & -z & = & 0\\ -3x & +3y & +0 & = & 0\\ 3x & -3y & +0 & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z\\ x & = & y\end{array}\right.$$
Donc $\mathrm{Ker}\,(f)=\mathbb{R}(1,1,1)$.
L'image de f est engendrée par les colonnes C_1, C_2 et C_3 de A. Or $C_3=-C_1-C_2$ et (C_1,C_2) est une famille libre. Donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}\,((2,-1,-1),\,(-1,2,-1))$.
Soit $(x,y,z)\in \mathrm{Im}\,(f)\cap\mathrm{Ker}\,(f)$. Il existe λ et μ tels que $(x,y,z)=(2\lambda-\mu,-\lambda+2\mu,-\lambda-\mu)$, et on a $2\lambda-\mu=2\mu-\lambda=\lambda-\mu$. Donc $\lambda=\mu=0$. Donc $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$ sont en somme directe. Par un argument de dimension, ils sont supplémentaires.
3. Soit $F=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid f(v)=v\right\}=\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Le vecteur (x,y,z) appartient à F si et seulement si $x+y+z=0$. On a donc $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{vect}\,((2,-1,-1),\,(-1,2,-1))=\mathrm{Im}\, f$.
4. Nous avons montré que le noyau et l'image de f sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. De plus, nous venons de remarquer que pour tout $x\in\mathrm{Im}\,(f)$, $f(x)=x$. Donc f est une projecteur sur $\mathrm{Vect}((2,-1,-1),\ (-1,2,-1))$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}(1,1,1)$.
5. Dans la base $((1,1,1),\ (2,-1,-1),\ (-1,2,-1))$ la matrice de f est
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Donc par changement de base, on a :
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
où $P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-2\end{pmatrix}$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\, u$.

On a
$$\begin{aligned} u(x,y,z)=0 &\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =0\\ -x+2y-2z & =0\end{array}\right.\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =0\\ 3y-z & =0\end{array}\right.\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x & =-4y\\ z & =3y\end{array}\right.. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{vect}\,((-4,1,3))$. D'après le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}\, u = 2$ donc $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$;

(ii) u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$.

Raisonnons par double implication.

$i \Rightarrow ii$. On suppose que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$. On a alors

$$u \circ u = (u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u) = u \circ v = u.$$

De même pour v. Donc u et v sont des projecteurs.

Maintenant, si $u(x) = 0$ alors $v(x) = v(u(x)) = 0$, et si $v(x) = 0$ alors $u(x) = u(v(x)) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$.

$ii \Rightarrow i$. Soit u et v des projecteurs avec $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v) = G$. On note $F = \mathrm{Im}\, u$ et $F' = \mathrm{Im}\, v$. On a donc $E = F \oplus G = F' \oplus G$. Soit $x \in E$, on peut décomposer x de deux façons :

$$x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G} \quad \text{et} \quad x = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{g'}_{\in G}.$$

On a alors $u(x) = u(f') + u(g') = u(f')$. Maintenant, $u(v(x)) = u(v(f')) = u(f')$, car $f' \in F' = \mathrm{Im}\, v$ donc $v(f') = f'$ (propriétés d'un projecteur). Finalement, on a bien $u(x) = u \circ v(x)$ pour tout $x \in E$. Le raisonnement est le même pour $v = v \circ u$.

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la matrice de f dans cette base.

Puisque $f^2 \neq 0$, on peut trouver $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$. Si $\lambda x + \mu f(x) + \gamma f^2(x) = 0$, on applique f et on obtient $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$. On applique à nouveau f, ce qui donne $\lambda f^2(x) = 0$ et donc $\lambda = 0$. Donc $\mu f^2(x) = 0$, ce qui donne $\mu = 0$ et enfin $\gamma f^2(x) = 0$, donc $\gamma = 0$. La famille est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dev : Décomposition de Jordan-Chevalley (Dunford) algorithmique

Exercice 17. Soit $n \geq 1$. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. On veut montrer qu'il existe deux matrices $D, N \in M_p(\mathbb{K})$ avec D diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$, telles que $A = D + N$, et que cette décomposition est unique.

De plus, de telles matrices D, N sont des polynômes en A : $D, N \in \mathbb{K}[A]$. On va pour cela construire N et D via une suite de matrices (on obtiendra le résultat en un nombre fini d'étapes).

1. (a) Soient $M, N, N' \in M_p(\mathbb{K})$ avec N, N' nilpotentes, et M, N, N' qui commutent entre elles.
   Montrer que MN et $N + N'$ sont nilpotentes.
   (b) Soient U une matrice inversible, N une matrice nilpotente, telles que $UN = NU$.
   Montrer que $U - N$ est inversible.
2. (a) Soit $R(X) = pgcd(\chi_A(X), \chi_A'(X))$. On pose $P = \frac{\chi_A}{R}$.
   En utilisant la décomposition de χ_A en éléments irréductibles, montrer que P est scindé à racines simples.
   Donner la décomposition en éléments irréductibles de P.
   (b) Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$. On s'aidera de la décomposition de P, et d'un diviseur commun.
   (c) Montrer que $P(A)$ est nilpotent.
   On pose r le premier entier positif tel que $P(A)^r = 0$.
   (d) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
   Dans $\mathbb{K}[X, Y]$, montrer qu'il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{K}[X, Y]$ tel que $Q(X + Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X, Y)$.
   On pourra utiliser la linéarité.
3. On introduit la suite $(A_n)_n$ par $A_0 = A$, et $A_{n+1} = A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1}$ (si cela existe).
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la matrice A_n existe, que $A_n \in \mathbb{K}[A]$, qu'il existe $B_n \in \mathbb{K}[A]$ telle que $P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n$, et que $P'(A_n)$ est inversible.
5. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $P(A_n) = 0$, $\forall n \geq n_0$.
6. Montrer que la suite $(A_n)_n$ est stationnaire àpcr.
7. Montrer que A_{n_0} est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

8. Montrer que $A_{n_0} - A$ est nilpotente.
   On pourra utiliser un télescopage.
9. Obtenir une décomposition $A = D + N$ telle qu'énoncée initialement.
   Combien d'éléments de la suite faut-il calculer pour obtenir cette décomposition ?
10. Montrer que cette décomposition est unique.